TUẦN 19: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC

Mở đầu: Phương pháp quy nạp được biết đến như là cách tổng quát hóa các vấn đề từ những trường hợp cụ thể. Phương pháp chứng minh bằng quy nạp là một phương pháp hữu hiệu và hay được sử dụng trong chứng minh toán học.

Chúng ta hãy xét ví dụ sau đây:

Ví dụ 1: “Tìm công thức tính tổng của n số tự nhiên lẻ đầu tiên”.

Chúng ta thử tính toán với một số giá trị cụ thể của n:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 & n &= 1 \\ 1+3 &= 4 & n &= 2 \\ 1+3+5 &= 9 & n &= 3 \\ 1+3+5+7 &= 16 & n &= 4 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 & n &= 5 \end{aligned}$$

Quan sát thấy rằng $1 = 1^2$; $4 = 2^2$; $9 = 3^2$; …

Từ đó ta thử dự đoán công thức cho trường hợp tổng quát:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Ta thử tiếp tục tìm hiểu ví dụ sau:

Ví dụ 2: “Với mỗi số nguyên dương n thì $n^2 - n + 41$ là số nguyên tố”.

Xét bảng thử các giá trị ban đầu dưới đây:

n	$n^2 - n + 41$	Prime?
1	41	Yes
2	43	Yes
3	47	Yes
4	53	Yes
5	61	Yes

Đến đây chúng ta có thể thử tiếp và nhận thấy có nhiều giá trị của n để $n^2 - n + 41$ là số nguyên tố. Tuy nhiên với n = 41 ta có: $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ lại không là số nguyên tố.

Hình thức của phương pháp quy nạp toán học:

Giả sử P_n là một khẳng định phụ thuộc vào số tự nhiên n, và giả sử các điều kiện sau đây là đúng:

1. P_1 đúng.

2. Với mỗi giá trị của k, nếu P_k đúng thì P_{k+1} cũng đúng.

Khi đó P_n đúng với mọi giá trị của n.

Từ phát biểu trên ta thấy:

P_1 đúng. (vì điều kiện 1)

P_2 đúng, do P_1 đã đúng (điều kiện 2)

P_3 đúng, do P_2 đã đúng (điều kiện 2)

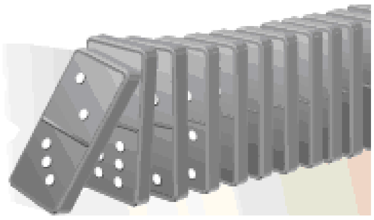
P_4 đúng, do P_3 đã đúng (điều kiện 2)

…

Do quá trình đó lặp lại không dừng nên ta sẽ được P_n đúng cho mọi giá trị của n.

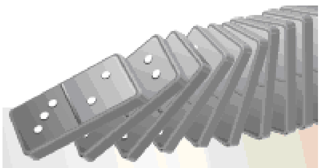
Để dễ dàng hình dung hơn về phương pháp quy nạp, ta hãy xem xét quá trình đổ của các quân domino trong một dãy domino dài vô hạn.

Điều kiện 1: tương tự như việc quân domino đầu tiên có thể đổ.



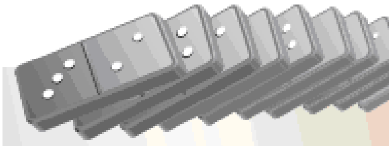
Điều kiện 1: Quân domino thứ nhất đổ

Điều kiện 2: ứng với việc nếu quân domino thứ k đổ thì quân domino thứ k + 1 cũng sẽ đổ theo.



Điều kiện 2: Nếu quân domino thứ k đổ, thì quân domino thứ k + 1 cũng đổ theo.

Quá trình lặp lại vô hạn lần, từ đó ta có tất cả các quân domino đều đổ:



Kết luận: Tất cả các quân domino đều đổ

Bây giờ chúng ta quay lại quá trình chứng minh biểu thức ở ví dụ 1 trên là đúng.

$P_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ (*)

Với n = 1 ta có $P_1 = 1^2$ => (*) đúng với n = 1.

Giả sử (*) đúng đến giá trị n = k, tức là:

$P_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ (1).

Ta đi chứng minh (*) đúng với n = k + 1 hay:

$P_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$

Vì ta đã giả sử P_k đúng nên ta đã có (1), từ đây ta biến đổi để xuất hiện (2). (1) còn được gọi là giả thiết quy nạp.

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad P_k$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) \qquad \text{cộng } 2k + 1 \text{ hai vế}$$

Từ đó suy ra: $P_{k+1} = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$

BÀI TẬP

***Dạng 1** : Chứng minh biểu thức bằng nhau*

Bài 1. Chứng minh rằng : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ $(\forall n \in N)$

Bài 2. Hãy tính tổng : $S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \ldots + (-1)^n(2n - 1)$

Bài 3. Chứng minh rằng: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Bài 4. Chứng minh rằng: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{2}$

Bài 5. Chứng minh rằng: $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Bài 6. Chứng minh rằng: $1.4 + 4.7 + 7.10 + \ldots + (3n - 2)(3n + 1) = n(n + 1)^2$

Bài 7. Chứng minh rằng: $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots.(n + n) = 2^n.1.3.5\ldots.(2n - 1)$

Bài 8. Chứng minh rằng: $\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\frac{3^2}{5.7}+\ldots+\frac{n^2}{(2n-1).(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

Bài 9. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Bài 10. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

Dạng 2: Phương pháp quy nạp trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh các kết luận sau:

Bài 1 . $2^n > n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 2. $n! > n^2$ với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

Bài 3. $2^n < n!$ với mọi số tự nhiên $n \geq 4$.

Bài 4. $3^n < n!$ với mọi số tự nhiên $n \geq 7$.

Bài 5. $3^n \geq 2n + 1$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 6. $n! < n^n$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 7. $2^{n+2} \geq 2n + 5$ với mọi số tự nhiên $n \geq 1$.

Bài 8. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ với mọi số tự nhiên ≥ 1.

TUẦN 20: PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP TOÁN HỌC (tiếp)

Dạng 3: Chứng minh chia hết

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta có:

$B_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ chia hết cho 133

Lời giải: Với n = 0 ta có: $B_0 = 11^2 + 12^1 = 133 \vdots 133$ => (*) đúng.

Giả sử (*) đúng đến giá trị n = k, tức là: $B_k = 11^{k+2} + 12^{2k+1} \vdots 133$ (1)

Xét $B_{k+1} - B_k = 11^{k+1+2} + 12^{2(k+1)+1} - (11^{k+2} + 12^{2k+1})$

$= 11^{k+3} - 11^{k+2} + 12^{2k+3} - 12^{2k+1}$

$= 10.11^{k+2} + 143.12^{2k+1}$

$= 10.121.11^k + 143.12.144^k$

$\equiv 10.121.11^k + 10.12.11^k \equiv 10.11^k(121+12) \equiv 0 \pmod{133}$

Theo giả thiết quy nạp (1) ta có $B_k \vdots 133$ => $B_{k+1} \vdots 133$ hay (*) đúng với n = k + 1.

Vậy (*) đúng với mọi số tự nhiên n.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên lớn hơn hoặc bằng 2 đều phân tích được thành tích của một hay nhiều thừa số nguyên tố.

Bài 3. Chứng minh rằng: $6^{2n} - 1$ chia hết cho 35 với $\forall n \in N$

Bài 4. Chứng minh rằng $7^{n+2} + 8^{2n+1}$ chia hết cho 57 với $\forall n \in N$

Bài 5. Chứng minh rằng: $2^{5n+3}+5^n.3^{n+2}$ chia hết cho 17 với $\forall n \in N$

Bài 6. Chứng minh rằng: $2^{n+5}.3^{4n} + 5^{3n+1}$ chia hết cho 37 với $\forall n \in N$

Bài 7. Chứng minh rằng: $4^n + 15n - 1$ chia hết cho 9 với $\forall n \in N$

Bài 8. Chứng minh rằng: $3^{2n+3} - 24n + 37$ chia hết cho 64 với $\forall n \in N$

Bài 9. Chứng minh rằng: $5^{6n+5} + 7^{6n} + 6$ chia hết cho 9 với $\forall n \in N$

Bài 10. Chứng minh rằng $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ chia hết cho 11 với $\forall n \in N$

Dạng 4: Quy nạp trong các bài toán rời rạc

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên *n* khác 0, luôn tồn tại một số gồm n chữ số, trong đó chỉ chứa chữ số 1 và 2, chia hết cho 2^n

Lời giải:

Ta chứng minh kết quả bài toán bằng phương pháp Quy nạp toán học.

Với *n* = 1 ta có: $A_1 = 2 \vdots 2^1$

Với $n = 2$ ta có số $A_2 = 12 \vdots 2^2$

Giả sử kết luận bài toán đúng đến n = k tức là tồn tại số A_k có k chữ số, chỉ gồm chữ số 1 và chữ số 2, chia hết cho 2^k.

Đặt $A_k = 2^k.q$

Nếu q chẵn => Chọn số $A_{k+1} = \overline{2A_k} = 2.10^k + 2^kq$ chia hết cho 2^{k+1}

Nếu q lẻ => Chọn số $A_{k+1} = \overline{1A_k} = 10^k + 2^kq = 2^k(5^k + q)$ chia hết cho 2^{k+1}

Vậy ta chọn được số A_{k+1} có k + 1 chữ số, chỉ gồm chữ số 1 và 2, chia hết cho 2^{k+1}

Phân tích: Ở bài toán này, chúng ta cần chứng minh sự tồn tại của số thỏa mãn tính chất cho trước. Khi áp dụng phương pháp quy nạp, chúng ta lựa chọn khéo léo kết quả cho bước chứng minh đúng khi n = k + 1 dựa trên kết quả đã có ở giả thiết quy nạp khi n = k.

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số bưu phí lớn hơn 7 xu đều có thể được trả bằng cách dán các con tem 3 xu và 5 xu.

Lời giải: Ta đi chứng minh bài toán bằng phương pháp quy nạp.

Dễ thấy 8 = 3 + 5; 9 = 3 + 3 + 3 => các bưu phí 8 xu và 9 xu được trả bằng cách dán các con tem 3 xu và 5 xu.

Giả sử bưu phí với giá k xu được trả bằng cách dán các con tem 3 xu và 5 xu.

- Nếu trong cách trả tiền cho k xu, có ít nhất 1 con tem 5 xu, khi đó ta thay 5 xu bởi 2 con tem 3 xu, ta sẽ nhận được cách trả tiền cho k + 1 xu thỏa mãn đề bài.
- Nếu trong cách trả tiền cho k xu, không có con tem 5 xu nào, khi đó số tem 3 xu không nhỏ hơn 3. Lúc này ta thay 3 tem 3 xu bởi 2 tem 5 xu sẽ nhận được 1 cách trả tiền cho k + 1 xu.

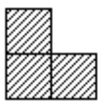
Vậy trong mọi trường hợp, ta đều có cách trả tiền cho k + 1 xu.

Theo nguyên lý quy nạp, bài toán được chứng minh.

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n luôn tìm được số gồm n chữ số, chỉ gồm chữ số 1 và 2, chia hết cho 2^n.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi bưu phí không nhỏ hơn 12 xu, đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 xu và 5 xu.

Bài 5. Cho lưới ô vuông 2^n x 2^n ($n \in N^*$), bị khuyết một ô bất kỳ. Chứng minh rằng luôn có thể lát được lưới ô vuông đó bằng các hình chữ L (xem hình dưới).



Bài 6. Hỏi có thể lát lại bàn cờ kích thước $n \times n$ ($n > 5$, n lẻ và không chia hết cho 3) bằng các miếng hình chữ L được hay không?

Bài 7. Có một cầu thang gồm n bậc. Giả sử mỗi bước đi có thể đi lên một số bậc bất kỳ (ít nhất 1 bậc, nhiều nhất là n bậc). Hỏi có bao nhiêu cách để có thể đi đến bậc thứ n?